Théorème des lacunes de Hadamard

Le- ons : 207,230,243,245

Référence : ZUILY Claude, QUEFFELEC Hervé ; Analyse pour l'agrégation, 4e édition ; Théorème IV.6 (p55) ; Broché.

Théorème. Théorème des Lacunes de Hadamard—
Soit $(\lambda_n)_n$ une suite croissante d'entiers non-nuls telle qu'il existe $\alpha > 1$ vérifiant $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq \alpha > 1$, pour tous $n \geq 0$.
Soit $(a_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n.z^{\lambda_n}$ est de rayon de convergence 1.
Alors, la somme de cette série entière ne se prolonge analytiquement en aucun point de $\partial\mathbb{D}(0,1)$.

Démonstration.

Notons f la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n.z^{\lambda_n}$.
Supposons avoir un θ tel que $e^{i\theta}$ f admette un prolongement analytique sur un voisinage de ce point.
Quitte à remplacer f par $\widetilde{f}(z) := f(e^{-i\theta}z)$ et a_n par $\widetilde{a_n} := a_n.e^{-\lambda_n i\theta}$, $(\widetilde{a_n})_n$, on peut supposer que f admet un prolongement analytique en 1 car $\sum_{n\geq 0} \widetilde{a_n}.z^{\lambda_n}$ est encore une série lacunaire de rayon de convergence 1 et $\widetilde{f}$ est encore la somme d'une série entière lacunaire, et admet un prolongement anlytique sur un voisinage de 1.
On peut donc supposer avoir un voisinage V de 1 et une fonction g analytique sur $\mathbb{D}(0,1)\cup V$ qui prolonge f , c'est-à-dire $g\big|_{\mathbb{D}(0,1)} \equiv f$.

On va chercher à montrer que l'existence de ce prolongement impliquerait que le rayon de convergence de la série lacunaire est > 1.
Comme pour tout $n \geq 0$, on a $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq \alpha > 1$, il existe $p \geq 1$ assez grand tel que $1 < \frac{p+1}{p} < \alpha$.
Ainsi, pour tout $n \geq 0$, on a : $p.\lambda_n < (p+1)\lambda_n < p\lambda_{n+1} < (p+1)\lambda_{n+1}$.

Considérons la fonction $\varphi(z) = \frac{z^p+z^{p+1}}{2}$ analytique sur $\mathbb{C}$.
Pour tout z tq $|z| \leq 1$, on a : $|\varphi(z)| = |z^p|.|\frac{1+z}{2}| \leq \frac{|1+z|}{2} \leq \frac{|1|+|z|}{2} \leq 1$.
Si $|z| < 1$ on a donc $|\varphi(z)| < 1$.
Si $|z| < 1$, $|\varphi(z)| = 1$ si on est dans le cas d'égalité stricte de l'inégalité triangulaire, c'est-à-dire z=a.1 avec $a \in \mathbb{R}_+$.
Donc si $|z| = 1$ et $z \neq 1$, $|\varphi(z)| < 1$. Et si $z = 1$, $\varphi(z) = 1$.
Ainsi, $p(\overline{\mathbb{D}(0,1)}) \subset \mathbb{D}(0,1) \cup \{1\} \subset \mathbb{D}(0,1) \cup V$.
Comme φ est continue, $\varphi^{-1}(\mathbb{D}(0,1) \cup V)$ est un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ contenant $\overline{\mathbb{D}(0,1)}$.
Comme $\overline{\mathbb{D}(0,1)}$ est compact, sa distance au complémentaire de Ω est non-nulle, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{D}(0,1+\varepsilon) \subset \Omega$.
On définit alors $\widetilde{g} : z \in \Omega \mapsto g \circ p(z)$, qui est analytique sur Ω.
Comme $\mathbb{D}(0,1+\varepsilon) \subset \Omega$, la formule de Cauchy appliquée à $\widetilde{g}$ en 0 pour des cercles de rayon $0 < \rho < 1+\varepsilon$ nous permet de voir que la série de Taylor de $\widetilde{g}$ en 0 a un rayon de convergence $\geq 1+\varepsilon$.

Notons $\sum_{n\geq 0} b_n.z^n$ cette série de Taylor.

Soit $z \in \mathbb{D}(0,1)$. On a $\widetilde{g}(z) = g(\varphi(z)) = f(\varphi(z))$ car $\varphi(z) \in \mathbb{D}(0,1)$.
Or, $f(\varphi(z)) = \sum_{n\geq 0} a_n(p(z))^{\lambda_n} = \sum_{n\geq 0} a_n(\frac{z^p+z^{p+1}}{2})^{\lambda_n}$.
Et pour tout $n \geq 0$, $(\frac{z^p+z^{p+1}}{2})^{\lambda_n} = \sum_{k=0}^{\lambda_n} \frac{\binom{\lambda_n}{k}}{2^{\lambda_n}}.z^{(p+1)k}.z^{p(\lambda_n-k)} = \sum_{k=0}^{\lambda_n} \frac{\binom{\lambda_n}{k}}{2^{\lambda_n}}.z^{p\lambda_n+k}$.
Ainsi, $(\frac{z^p+z^{p+1}}{2})^{\lambda_n}$ est une combinaison linéaire de $z^{p\lambda_n+k}$, avec $0 \leq k \leq \lambda_n$, donc une combinaison linéaire de $z^{p\lambda_n}, z^{p\lambda_n+1}, \ldots, z^{(p+1)\lambda_n}$.
Or, le choix de p entraîne $p.\lambda_n < (p+1)\lambda_n < p\lambda_{n+1} < (p+1)\lambda_{n+1}$, donc les développements des $(\frac{z^p+z^{p+1}}{2})^{\lambda_n}$ sont tous des combinaisons linéaires finies de puissances de z différentes.

Et comme $\widetilde{g}(z) = f(\varphi(z))$ sur $\mathbb{D}(0,1)$, on trouve alors que $b_n = \left| \begin{array}{l} a_m.\frac{\binom{\lambda_m}{k}}{2^{\lambda_m}} \text{ si } b = \lambda_m + k,\ 0 \leq k \leq \lambda_m \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$

Pour conclure, prenons $z = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$. On a $|z| = z$
Comme $|z| < 1 + \varepsilon$, la série $\sum_{k \geq 0} b_k.z^k$ est alors normalement convergente.
Donc la suite $(\sum_{k=0}^{(p+1)\lambda_n} |b_k|.z^k)_n$ est convergente.
Or, pour tout $n \geq 0$, $\sum_{k=0}^{(p+1)\lambda_n} |b_k|.z^k = \sum_{l=0}^{n} |a_l|.(\frac{z^p+z^{p+1}}{2})^{\lambda_l}$ au vu des calculs précédents.
Or, $|\varphi(z)| = \varphi(1+\frac{\varepsilon}{2}) > 1$, donc la série $\sum_{n \geq 0} a_n.\varphi(z)^{\lambda_n}$ diverge grossièrement, donc la suite $(\sum_{l=0}^{n} |a_l|.\varphi(z)^{\lambda_l})_n$ diverge vers $+\infty$.
On aboutit ainsi à une contradiction, qui prouve que la fonction f considérée ne se prolonge pas analytiquement en 1, donc que toute somme d'une série lacunaire comme donnée dans l'énoncé n'admet pas de prolongement analytique en aucun point du bord de son disque de convergence.

$\square$